دولة الكويت

وزارة التربية
التوجيه الفني العام للرياضيات
المجال الدراسي الرياضيات

(عدد صفحات الامتحان:11 صفحة)
الزمن : ساعتان و45 دقيقة
العام الدراسي 2019/ 2020 م

نموذج إجابة امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي

القسم الأول – أسئلة المقال

تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (14 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ (7 درجات)

الحل :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$	1
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right)$	1
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+\cos x)\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$	$\frac{1}{2}$
$= \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}(1)+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$= (1)^2 \times (1+1)$	1
$= 1 \times 2 = 2$	$\frac{1}{2}$

تابع السؤال الأول : (7 درجات)

(b) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

1 $$\frac{x^2 - 3x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$

1 $$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x > 0 \\ -x + 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3$$

1 $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$$

1 $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 3) = 3$$

1 $$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

1 $\therefore$ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ليست موجودة

1 $\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$

السؤال الثاني : (14 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ (7 درجات)

الحل:

بفرض أن $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

1 $$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ عندما $x>0$ يكون $|x|=x$ $$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}$ بشرط $x\neq 0$ $$=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}$ $$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$=1+0-0=1 \quad , \; 1>0$$

1 $$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq 0$$

$\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$$

$\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{1}{1}=1$$

تابع السؤال الثاني :

(b) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ عند $x = 2$ (7 درجات)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{4+x^2}\right)$$

2 $$\frac{dy}{dx} = \frac{-8(2x)}{(4+\ x^2)^2} = \frac{-16x}{(4+\ x^2)^2}$$

1 $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \left[\frac{-16x}{(4+\ x^2)^2}\right]_{x=2} = \frac{-16(2)}{(4+\ (2)^2)^2} = \frac{-1}{2}$$

1 ميل المماس لمنحنى الدالة يساوي $\dfrac{-1}{2}$

1 $$\because x = 2 \quad , \quad \therefore y = \frac{8}{4+(2)^2} = 1$$

1 معادلة المماس لمنحنى الدالة : $y - y_1 = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} \cdot \ (x - x_1)$

1 $$y - 1 = \left(\frac{-1}{2}\right)(x-2)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

السؤال الثالث : (14 درجة)

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$ (7 درجات)

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

الحل :

(1) $\because$ f دالة كثيرة الحدود

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{2}$ نوجد النقاط الحرجة : $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0$

$\frac{1}{2}$ $3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $x = 2 \quad , x = -2$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي :

$\frac{1}{2}$ $(-2, f(-2)) = (-2, 11)$

$\frac{1}{2}$ $(2, f(2)) = (2, -21)$

(2) نكون الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty \quad -2 \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty,-2)$ و الفترة $(2,\infty)$

$\frac{1}{2}$ و متناقصة على الفترة $(-2,2)$

$\frac{1}{2}$ (3) توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $f(-2) = 11$

$\frac{1}{2}$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ و هي $f(2) = -21$

تابع السؤال الثالث :

(b) بين أن الدالة f : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

على الفترة $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ به النظرية ، فسر اجابتك

الحل : (7 درجات)

لتكن الدالة g : $g(x) = x$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ — $\frac{1}{2}$

الدالة h : $h(x) = \dfrac{1}{x}$

الدالة h حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R} - \{0\}$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore$ دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة على $\mathbb{R} - \{0\}$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ و قابلة للاشتقاق على $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — $\frac{1}{2}$

$$= \frac{f(2) - f(\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}}$$

$f(2) = \dfrac{5}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} \longrightarrow f'(c) = 1 - \dfrac{1}{c^2}$ — $\frac{1}{2}$

$1 - \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \longrightarrow 1 - \dfrac{1}{c^2} = 0 \qquad \therefore c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$ — 1

$c = 1 \in \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\quad c = -1 \notin \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ — 1

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ، $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ — $\frac{1}{2}$

السؤال الرابع : (14 درجة)

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x \le 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد $f'(x)$ إن أمكن (8 درجات)

الحل :

مجال الدالة : $D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$ — $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x < 2 \\ \text{تبحث} & : \quad x = 2 \\ 4 & : \quad x > 2 \end{cases}$$ $\frac{1}{2}$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$ $\frac{1}{2}$

(إن وجدت)

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4$$ 1

(إن وجدت)

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-3-5}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-8}{x-2}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 4 = 4$$ 1

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4$$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore f'(2) = 4$$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore \ f'(x) = \begin{cases} 2x & : x \le 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$ $\frac{1}{2}$

تابع السؤال الرابع:

(b) إذا كانت : $n = 20 \;,\quad \bar{x} = 40 \;,\quad S = 7$ (6 درجات)

اختبر الفرض بأن $\mu = 35$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل :

$n = 20 \;,\quad \bar{x} = 40 \;,\quad S = 7$

(1) صياغة الفروض :

$H_0 : \mu = 35$ مقابل $H_1 : \mu \neq 35$ $\frac{1}{2}$

(2) $\because$ σ غير معلومة ، $n < 30$ $\frac{1}{2}$

نستخدم المقياس الاحصائي t : $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $\frac{1}{2}$

$$t = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.194$$ $1\frac{1}{2}$

(3) $\because n = 20$ درجات الحرية $n - 1 = 20 - 1 = 19$ $\frac{1}{2}$

مستوى المعنوية α : $\because \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\frac{1}{2}$

من جدول توزيع t : $\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$ $\frac{1}{2}$

(4) منطقة القبول هي : $(-2.093 \,, 2.093)$ $\frac{1}{2}$

(5) اتخاذ القرار الإحصائي : $\because 3.194 \notin (-2.093 \,, 2.093)$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ القرار نرفض فرض العدم $\mu = 35$ و نقبل الفرض البديل $\mu \neq 35$ $\frac{1}{2}$

الكنترول العلمي وزارة التربية CONTROL

وزارة التربية التوجيه الفني العام للرياضيات

القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) إلى (4) عبارات ظلل في ورقة الاجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|2x-3|} = \dfrac{1}{2}$

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\dfrac{2}{x}\right)$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2}\csc^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(3) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات و رأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ ، هي $24\ \text{units}^2$

(4) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055

ثانيا : في البنود من (5) إلى (14) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

(5) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}$ يساوي

$(a)\ -9$ $(b)\ -3$ $(c)\ 0$ $(d)\ 9$

(6) لتكن الدالة f : $g(x) = x^2-3, f(x) = \sqrt{x^2+7}$ فإن $(f\circ g)(0)$ يساوي

$(a)\ 1$ $(b)\ -1$ $(c)\ 4$ $(d)\ -4$

(7) إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فإن قيم $a\ ,\ b$ هي

$(a)\ a=0\ ,b=6$ $(b)\ a=0\ ,b=-6$

$(c)\ a=6\ ,b=0$ $(d)\ a=-6\ ,b=0$

(8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على

$(a)\ \left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ $(b)\ (5,\infty)$ $(c)\ R$ $(d)\ (-5,5)$

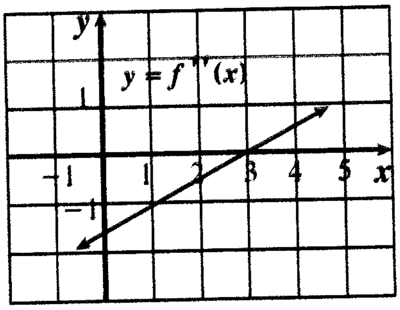
(9) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف

$(a)\quad f(x) = x^3 + 5x$ $(b)\quad f(x) = 4x^2 - 2x^4$

$(c)\quad f(x) = x^3$ $(d)\quad f(x) = (x-2)^4$

---

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرا للاسفل في الفترة



$(a)\quad (-\infty, 3)$ $(b)\quad (3, \infty)$

$(c)\quad (-1,4)$ $(d)\quad (3,5)$

---

(11) الدالة k : $k(x) = -|x^2 - 4|$ لها

(a) نقطتان حرجتان فقط (b) قيمة صغرى مطلقة

(c) قيمة عظمى مطلقة (d) ليس أيا مما سبق

---

(12) إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو

(a) ناب (b) ركن

(c) مماس عمودي (d) غير متصلة

---

(13) ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو

$(a)\quad -5$ $(b)\quad \frac{-1}{5}$ $(c)\quad \frac{1}{5}$ $(d)\quad 5$

---

(14) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \ x \geq 1 \\ 4x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو

$(a)\quad \{1\}$ $(b)\quad [1, \infty)$ $(c)\quad \mathbb{R}$ $(d)\quad \mathbb{R} - \{1\}$

انتهت الأسئلة

ورقة إجابة البنود الموضوعية

(1)	(a)	[redacted]	(c)	(d)
(2)	[redacted]	(b)	(c)	(d)
(3)	(a)	[redacted]	(c)	(d)
(4)	[redacted]	(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	(b)	(c)	[redacted]
(6)	(a)	(b)	[redacted]	(d)
(7)	[redacted]	(b)	(c)	(d)
(8)	(a)	[redacted]	(c)	(d)
(9)	(a)	(b)	(c)	[redacted]
(10)	[redacted]	(b)	(c)	(d)
(11)	(a)	(b)	[redacted]	(d)
(12)	(a)	[redacted]	(c)	(d)
(13)	[redacted]	(b)	(c)	(d)
(14)	(a)	(b)	[redacted]	(d)

14

الكنترول العلمي
وزارة التربية
CONTROL

وزارة التربية
التوجيه الفني العام للرياضيات