الوحدة السابعة : الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية: هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز إليه بالرمز i: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$

الأعداد التخيلية : لأي عدد حقيقي موجب m ، $\sqrt{-m} = \sqrt{m}i$

تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ إعداداً تخيلية .

العدد المركب : هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية .

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$ (الصورة الجبرية للعدد المركب)

الجزء الحقيقي: a ، الجزء التخيلي: b

تساوي عددين مركبين :

$$z_1 = a_1 + b_1 i \ , z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \ , b_1 = b_2$$

مثال(1) : أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يأتي:

1. $2x + 3yi = -14 + 9i$

---

2. $14i^2 - 3i = 2x + (y + 5)i$

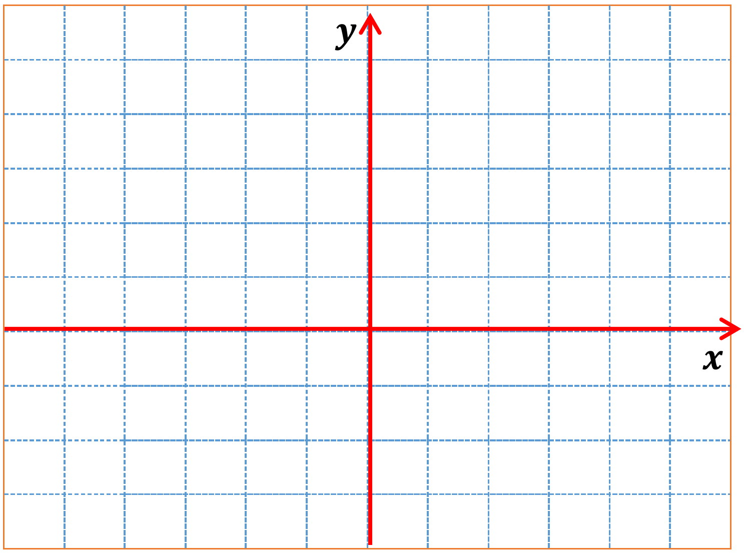
محمد جبر الخوالده
M.J.K

التمثيل البياني لعدد مركب

الصورة الديكارتية $M(a,b)$ ⟵⟶ $z = a + bi$ الصورة الجبرية

مثال (2) : مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب :

(a) $z_1 = -2 + 3i$ (b) $z_2 = -4$ (c) $z_3 = -i$ (d) $z_4 = 2(2 + i)$



مثال(3) : اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $K(7,0), H(1,-2), N(-4,1)$

النقطة $K(7,0)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

النقطة $H(1,-2)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

النقطة $N(-4,1)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

****

محمد جبر الخوالده M.J.K

العمليات على الأعداد المركبة	
$z_1 = a_1 + b_1 i \ , z_2 = a_2 + b_2 i$	
جمع و طرح الأعداد المركبة	أولاً
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$	
ضرب الأعداد المركبة	ثانياً
❶ $cz_1 = ca_1 + cb_1 i \quad , c \in \mathbb{R}$ ❷ $z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$	
قوى العدد المركب	ثالثاً
$i^{4p} = 1 \ , i^{4p+1} = i \ , i^{4p+2} = -1 \ , i^{4p+3} = -i \ , \quad p \in \mathbb{N}$	
مرافق العدد المركب و خواصه	رابعاً

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو : $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

✭ $z_1 . \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$	✭ $z_1 - \overline{z_1} = 2b_1 i$	✭ $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
✭ $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$	✭ $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$	✭ $\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

مثال (4): إذا كان : $z_1 = 2 + i \;, z_2 = -3 + 4i$ فأوجد :

❶ $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

❷ $\overline{z_1} . \overline{z_2}$

❸ $z_1 - \overline{z_2}$

❹ ${z_2}^{-1}$

مثال(5): إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد : $z^{12} \;,\; z^{27}$

مثال (6): إذا كان $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$, $z_1 = \sqrt{3} + i$ فأوجد :

❶ $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$ ❷ $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$ ❸ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب : إذا كان $z = a + bi$ فإن : $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1) : أوجد :

❸ $|2i|$ ❷ $|2 - 2i|$ ❶ $|5 + 12i|$

****

التحويل من الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y):

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta$$

مثال(2): حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية :

❸ $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ ❷ $(2, 270^\circ)$ ❶ $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

محمد جبر الخوالده M.J.K

التحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) :

☆ نوجد قيمة r باستخدام القانون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

☆ نوجد قياس زاوية الإسناد α : باستخدام : $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

☆ نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ من إشارة كل من x, y

☆ نوجد الزاوية θ اعتماداً على :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0, y > 0 \quad \text{الربع الأول} \\ \pi - \alpha & : x < 0, y > 0 \quad \text{الربع الثاني} \\ \pi + \alpha & : x < 0, y < 0 \quad \text{الربع الثالث} \\ 2\pi - \alpha & : x > 0, y < 0 \quad \text{الربع الرابع} \end{cases}$$

مثال(3) : أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية :

❶ $(-2,5)$ ❷ $(0,4)$ ❸ $(-2, -2\sqrt{3})$

الصورة المثلثية :

الصورة الجبرية $\quad$ الصورة المثلثية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \longleftrightarrow z = a + bi$$

مثال(4) : ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

❶ $z_1 = 2 + 2i$ ❷ $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ ❸ $z_3 = -1 - i$

مثال(5) : ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

❶ $z_1 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

❷ $z_2 = 2\left(sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

محمد جبر الخوالده M.J.K

مثال(6) : ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

❶ $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ ❷ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ❸ $\sqrt{3}(\cos 225^{\circ}+i\sin 225^{\circ})$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

حل المعادلات

حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$:

مثال(1) : أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة :

❶ $3z - 1 + i = 5 - 2i$

❷ $z + 2\bar{z} = 4 + i$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$:

مثال(2) : أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة :

❶ $16x^2 - 64 = 0$ ❷ $z^2 - 2z + 4 = 0$ ❸ $z + \frac{4}{z} = 2$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

مثال (3) : لتكن المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$

a) أثبت أن العدد المركب $z_1 = 2 + 4i$ **هو جذر لهذه المعادلة.**

b) أوجد الجذر الثاني.

محمد جبر الخوالده
M.J.K

الجذر التربيعي لعدد مركب

مثال (4) : أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب : $z = 3 + 4i$

مثال (5) : أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب : $z = -7 - 24i$