الوحدة الخامسة

التكامل

Integral

-1- التكامل غير المحدد

-2- التكامل بالتعويض

-3- تكامل الدوال المثلثية

-4- الدوال الأسية و اللوغاريتمية

-5- التكامل بالتجزئ

-6- التكامل باستخدام الكسور الجزئية

-7- التكامل المحدد

2017/2018

إعداد : أ. محمد جبر الخوالده

5-1 التكامل غير المحدد

تعريف : المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة) للدالة f المعرفة على مجالها I

إذا كان $\forall x \in I\ ,\ F'(x) = f(x)$

نظرية(1) إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، G مشتقة عكسية أيضاً للدالة f على الفترة I فإن :

$\forall x \in I\ ,\quad G(x) = F(x) + C$ حيث C ثابت

نظرية(2) إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f على الفترة I هي :

$F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري

مثال(1) أثبت أن : $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = 15(3x+2)^4$ ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية .

الحل : --

****

مثال(2) أثبت أن : $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

الحل :

تطبيق أثبت أن : $F(x) = \sqrt{1 + x^4}$ هي مشتقة عكسية للدالة :

$$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

الحل :

****

تعريف التكامل غير المحدد :

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقات العكسية F ويكتب على الصورة : $\int f(x)dx$

قواعد التكامل غير المحدد :

ملاحظات	التكامل	الرقم
k عدد ثابت	$\int kdx = kx + C$	1
(قاعدة القوى) $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	2

خواص التكامل غير المحدد :

ملاحظات	الخاصية	الرقم
الضرب بعدد ثابت $k \neq 0$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	1
الجمع و الطرح	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	2

ملاحظـــــــات	الرقم
$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$	1
$\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx$	2

مثال(3)

احسب : $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

مثال(4) أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a) $\int (2x-3)(x+4)dx$

b) $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

c) $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

****

تطبيق أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}\,dx$

----

b $\int (x-2)(2x+3)dx$

----

c $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

****

مثال(5) أوجد :

a $\int x\sqrt{x}dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

c $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال(6)

إن كان : $F(x) = \int (2x+5)dx$, $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

تطبيق

إن كان : $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$, $F(2) = 3$ فأوجد $F(x)$

5-2

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض:

إذا كانت F هي المشتقة العكسية للدالة f فإن :

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كانت $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن :

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

مثال(1) أوجد :

a $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}dx$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

****

تطبيق

أوجد :

a $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$

b $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\ \ (2x-5)dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

تعميم قاعدة القوى :

$$\int [g(x)]^n \, g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

مثال (2) أوجد :

$$\int \sqrt[5]{3x+7}\, dx$$

تطبيق أوجد :

a) $$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\, dx$$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

****

(b) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$$

مثال(3)

أوجد : $\int x(2x-1)^3dx$

M.J.K محمد جبر الخوالدة

****

مثال(4)

أوجد : $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

تطبيق

أوجد : $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$

5-3 تكامل الدوال المثلثية

الرقم	قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية
1	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx dx = \frac{-\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

****

مثال(1) أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int (\cos x + csc^2 x)\ dx$

b $\int \sec x\,(\tan x + \sec x)\,dx$

c $\int \frac{dx}{sin^2 x}$

تطبيق أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int (\sec x \tan x + \sin x)\,dx$

b $\int (\csc x\, \boldsymbol{cot\ x} + \sec^2 x)dx$

****

مثال(2) أوجد:

a $\int \sin 5x \, dx$

b $\int (x^2 + \cos 2x) dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

****

تطبيق أوجد:

a $\int x sec^2(x^2+2)dx$

b $\int x^2 \sin(x^3+1)dx$

****

مثال (3) أوجد :

a $\int sin^3 x . \cos x \, dx$

b $\int csc^2 x . \cot x \, dx$

تطبيق أوجد :

a $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$

b $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

****

مثال (4) أوجد :

a $\int cos^3(2x-3).\sin(2x-3)\, dx$

b $\int x^2.\sin(x^3-1)dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5\, cos2x\, dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

****

مثال(5)

أوجد : $\int csc^5 x . \cot x \, dx$

تطبيق

أوجد : $\int sec^3 x . \tan x \, dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

5-4 الدوال الأسية و اللوغاريتمية

قواعد اشتقاق الدالة الأسية			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$f(x) = a^u$	$f'(x) = u'a^u \ln a$	
3	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
4	$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	

مثال (1) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = 10^x$

b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = 5^{cosx}$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

****

مثال(2) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) $g(x) = e^{x^2-4}$

c) $h(x) = e^{tanx}$

تطبيق أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = 3e^{\frac{x}{5}}$

b) $g(x) = e^{x^2-x+1}$

c) $h(x) = e^{cscx}$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

قواعد اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
2	$f(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$
3	$f(x) = \ln\big(g(x)\big)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x) > 0$

مثال (3) أوجد مشتقات كل من الدوال التالية :

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$

----

b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$

----

c $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

----

d $k(x) = \ln(\sin x)$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

تكامل بعض الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الرقم	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة	ملاحظات
1	$\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$\int u' e^u dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = u' e^u$	
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	
4	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert u\rvert = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$

محمد جبر الخوالدة
M.J.K

****

مثال(4) أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

a $\int e^{3x}dx$

b $\int (2x-1).e^{x^2-x+3}dx$

تطبيق أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

a $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}dx$

b $\int \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}dx$

****

مثال (5) أوجد :

a $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$

تطبيق أوجد :

(a) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

(b) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(c) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$

****

مثال(6)

أوجد : $\int \tan x \, dx$

تطبيق

أوجد : $\int (\cot x + x^2) dx$

محمد جبر الخوالدة

M.J.K

****

5-5

التكامل بالتجزيء

قاعدة التكامل بالتجزيء :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال (1)

أوجد : $\int x \cos x \, dx$

تطبيق

أوجد : $\int x\sin(5x)\,dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال (2) أوجد :

a $\int (x-3)e^{(x-3)}\,dx$

b $\int 4xe^{-5x}\,dx$

****

مثال (3)

أوجد : $\int \ln x \; dx$

تطبيق

أوجد : $\int \ln(2x-1) \, dx$

****

مثال (4)

أوجد : $\int (x+1)\ln(x+1)\,dx$

تطبيق

أوجد : $\int x^2 \ln x^2 \;dx$

****

مثال (5)

أوجد : $\int x^2 \sin x \; dx$

تطبيق

أوجد : $\int (x^2 - 2x) \cos x \; dx$

مثال (6)

أوجد : $\int x^2 \, e^{x+2} \, dx$

تطبيق

أوجد : $\int x^2 \, e^{2x-3} \, dx$

****

مثال (7)

أوجد : $\int e^x \cos x \; dx$

****

تطبيق

أوجد : $\int e^{2x} \sin x \; dx$

****

5-6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

الحالة الأولى : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة :

لتكن $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة :

$$h(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots\ldots(a_kx+b_k)$$

حيث لايوجد عوامل مكررة و لايوجد عامل ثابت مضروب بآخر .

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

مثال (1) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ فأوجد :

a **الكسور الجزئية** .

b $\int f(x)dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

تطبيق

لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$ فأوجد :

(a) الكسور الجزئية

(b) $\int f(x)dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال (2)

أوجد : $\int \frac{12}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

****

تطبيق

أوجد : $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

****

الحالة الثانية : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر :

لتكن $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر .

لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$،

يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

مثال (3)

أوجد : $\int \frac{-6x+25}{x^3-4x^2+4x} dx$

M.J.K

****

تطبيق

أوجد : $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

****

مثال (4)

أوجد : $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام . نوجد أولاً ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة : $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي .

مثال (5)

أوجد : $\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} dx$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

****

تطبيق

أوجد : $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} dx$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

****

مثال (6)

أوجد : $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 + x} dx$

****

تطبيق

أوجد : $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$

محمد جبر الخوالده

M.J.K

7 – 5 التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال (1)

أوجد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

خواص التكامل المحدد		
ملاحظات	**الخاصية**	**الرقم**
الدالة f متصلة على الفترة I $a, b, c \in I \quad , k \in \mathbb{R}$	$\int_a^a f(x)dx = 0$	1
	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	2
$k = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$	$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$	3
	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	4
	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	5

إعداد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال (2) أوجد :

a $\int_{2}^{-3} 5dx$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - csc^2 x\right) dx$

c $\int_{3}^{3} (-2x^3 + x^2)dx$

d $\int_{1}^{2} \left(3e^x + \frac{e}{x}\right) dx$

****

تطبيق

أوجد :

a $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} cos3xdx$

b $\int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2} dx$

c $\int_{0}^{1} x\sqrt{x}dx$

d $\int_{1}^{2} \left(3e^x + \frac{5}{x}\right) dx$

مثال (3) أوجد :

a $\int_{-1}^{3} |x-2|dx$

b $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)dx$

تابع : خواص التكامل المحدد		
ملاحظات	**الخاصية**	**الرقم**
الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$	إذا كانت : $f(x) \geq 0 \quad ,\forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$	6
	إذا كانت : $f(x) \leq 0 \quad ,\forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq 0$	7
الدالتين f,g متصلتين على الفترة $[a,b]$	إذا كانت : $f(x) \leq g(x) \quad ,\forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$	8

محمد جبر الخوالدة M.J.K

****

مثال (4) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)dx \leq 0$$

تطبيق دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx \geq 0$$

****

مثال (5) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geq \int_0^1 (4x - 5)dx$$

****

تطبيق

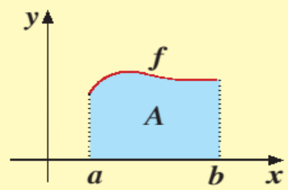
دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

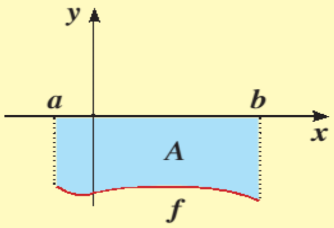
$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geq \int_{-1}^{2}(x-1)dx$$

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

والمستقيمين $x=b \quad , \quad x=a$





1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

مثال (6)

a) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ و محور السينات و المستقيمين $x = 4 \ , x = -2$

b) تحقق بيانياً .

تطبيق

أوجد قيمة : $\int_1^5 (2-2x)\,dx$ بيانيا

****

مثال (7) أوجد :

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ dx$$

تطبيق أوجد :

$$\int_{0}^{3} -\sqrt{9 - x^2}\ dx$$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال (8)

أوجد : $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, sec^2 x \, dx$

تطبيق

أوجد : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

مثال (9) أوجد :

a $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

b $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$

****

تطبيق استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل:

a $\int_{e}^{6} \frac{dx}{x\ln x} dx$

b $\int_{-1}^{3} \frac{x}{x^2+1} dx$

محمد جبر الخوالده M.J.K

****

مثال (10)

أوجد : $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

تطبيق

أوجد : $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

****

مثال (11)

أوجد : $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3} dx$

****

تطبيق

أوجد : $\int_{4}^{7} \frac{3x^2 - 17}{x^2 - x - 6} dx$

انتهت الوحدة الخامسة " التكامل "

محمد جبر الخوالده M.J.K